УДК 517.977

А. Ю. Коврижных

О ВЫЧИСЛЕНИИ ЦЕНЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ НА МИНИМАКС ПОЗИЦИОННОГО ФУНКЦИОНАЛА*

Рассматривается динамическая система, подверженная управлению и неизвестной динамической помехе. Показатель качества движения этой системы есть сумма отклонений от начала координат фазовой точки системы в заданные моменты времени. Задача об управлении по принципу обратной связи, гарантирующем показателю как можно меньшее значение (в смысле минимакса) включается в дифференциальную игру [1]–[7] в рамках концепции [2], [6]–[10]. Цена этой игры является искомым минимаксным результатом. Работа посвящена вопросам вычисления данного позиционного минимаксного результата при помощи более удобных максиминных программных, но стохастических конструкций.

В работе [6] дана процедура вычисления цены рассматриваемой игры, базирующаяся на рекуррентном построении выпуклых сверху оболочек для вспомогательных функций в подходящих областях размерности, не превосходящей размерности управляемой системы. Такая процедура обосновывается в [6] независимо от конструкций стохастического максимина [2], [6], но отмечается, что эта процедура инициируется идеей стохастического синтеза [2]. Вопрос о непосредственном и детальном обосновании связи конструкции стохастического программного максимина с соответствующей процедурой выпуклых сверху оболочек не является целью изложения в [6] и поэтому решается в настоящей работе.

В первой части статьи приводится прямое доказательство равенства стохастического программного максимина цене рассматриваемой дифференциальной игры. В работе [8] для показателя качества, который является суммой расстояния от начала координат фазовой точки в терминальный момент времени и интегральных затрат реализовавшихся управления и помехи, обоснована связь стохастического программного максимина с соответствующей конструкцией, основанной на выпуклых сверху оболочках для вспомогательных детерминированных функций. Данное в [8] доказательство уточняется и развивается во второй части настоящей статьи для функционала качества другой структуры. При этом строго прослеживается, что вычисление соответствующего стохастического программного максимина сводится к решению задачи о нахождении стохастических вектор-функций, доставляющих

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаменталвных исследований (грант №99-01-00144).

максимальное значение некоторому вспомогательному функционалу. Доказано, что максимум достигается на конечнозначной случайной векторной величине, построение которой базируется на каратеодоревских точках и весах, отвечающих рекуррентной последовательности выпуклых сверху оболочек из программной конструкции [6].

1. Постановка задачи

Пусть система описывается уравнением

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u + C(t)v, \ t \in [t_0, \vartheta], \tag{1.1}$$

$$x \in R^n, \quad u \in P \subset R^r, \quad v \in Q \subset R^s,$$

где x — фазовый вектор, u и v — векторы управлений первого и второго игроков соответственно, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — непрерывные при $t \in [t_0, \vartheta]$ матрицы-функции; t_0 и ϑ — фиксированные моменты времени; P, Q — выпуклые компакты. Заданы N моментов времени $t^{[i]} \in [t_0, \vartheta]$, $t^{[i]} < t^{[i+1]}$, $i = 1, \ldots, N-1$, $t^{[N]} = \vartheta$ и нормы $\mu^{[i]}(x)$, $x \in R^n$, $i = 1, \ldots, N$. Пусть выбран начальный момент $t_* \in [t_0, \vartheta)$ и дано исходное состояние $x[t_*] = x_*$. Допустимы измеримые по Борелю реализации $u[t_*[\cdot]\vartheta) = \{u[t], \ t_* \le t < \vartheta\}$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta) = \{v[t], \ t_* \le t < \vartheta\}$. Такие реализации порождают, согласно (1.1), абсолютно непрерывные движения системы $x[t_*[\cdot]\vartheta] = \{x[t], \ t_* \le t \le \vartheta\}$. Через K обозначим область возможных позиций, определяемую (см. [2, с.39]) в пространстве пар $\{t, x\}$, $t \in [t_0, \vartheta]$. Область K такова, что вдоль любого движения $x[t_*[\cdot]\vartheta]$ из исходной позиции $\{t_*, x_*\} \in K$ справедливо включение $\{t, x[t]\} \in K$. Показатель качества движений задан в виде функционала

$$\gamma = \gamma(x[t_*[\cdot]\vartheta]) = \sum_{i=g(t_*)}^{N} \mu^{[i]}(x[t^{[i]}]), \tag{1.2}$$

где

$$g(t_*) = \min\{i \ : t^{[i]} \ge t_*\}. \tag{1.3}$$

Задача построения управлений u и v, которые нацелены на минимизацию и максимизацию показателя качества (1.2) соответственно, формализуется как дифференциальная игра [6] в классе чистых позиционных стратегий $u(t, x, \varepsilon)$, $v(t, x, \varepsilon)$, которая имеет цену $\rho^0(t, x)$ и седловую точку $\{u^0(\cdot), \ v^0(\cdot)\}$. Известно, что оптимальные стратегии могут быть определены методом экстремального сдвига [2] по значениям цены игры в окрестности текущей позиции. Настоящая статья посвящена вычислению цены игры для возможных текущих позиций как исходных.

2. Стохастическая программная конструкция

Рассмотрим w-модель, описываемую дифференциальным уравнением

$$dw/dt = A(\tau)w + B(\tau)u + C(\tau)v, \ \tau \in [t_0, \vartheta], \tag{2.1}$$

где $w \in R^n, \ u \in P, \ v \in Q$.

Пусть $\{\tau_*, w_*\} \in K, \ \tau_* < \vartheta$ — исходная позиция для модели (2.1). Назначим разбиение

$$\Delta_k\{\tau_j\} = \{\tau_j : \ \tau_1 = \tau_*, \ \tau_j < \tau_{j+1}, \ \tau_{k+1} = \vartheta\}, \tag{2.2}$$

в которое включим все моменты $t^{[i]} \geq \tau_*$. Рассмотрим вероятностное пространство $\{\Omega, B, \mathrm{P}\}$, элементарные события которого $\omega = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$. Здесь $\xi_j \in [0,1], \ j = 1, \ldots, k$ — равномерно распределенные случайные величины, связанные с моментами τ_j разбиения (2.2), $\Omega = \{\omega\}$ — единичный куб в k-мерном пространстве, B — борелевская σ-алгебра для этого куба, P=P(B) — лебегова мера, B $\in B$.

Введем стохастические неупреждающие ([2], с.292) программы

$$u[\cdot] = \{u[\tau, \omega] \in P, \ \tau_* \leq \tau \leq \vartheta, \ \omega \in \Omega\}, \tag{2.3}$$

$$v[\cdot] = \{v[\tau, \omega] \in Q, \ \tau_* \leq \tau \leq \vartheta, \ \omega \in \Omega\}. \tag{2.4}$$

Из исходной позиции эти программы порождают случайные движения w-модели

$$w_{v[\cdot],u[\cdot]}[\tau, \omega] = X[\tau, \tau_*]w_* + \int_{\tau_*}^{\tau} X[\tau, \eta](B(\eta)u[\eta, \omega] + C(\eta)v[\eta, \omega])d\eta, \tag{2.5}$$

где $\tau \in [\tau_*, \vartheta], \ \omega \in \Omega, \ X[\tau, \eta]$ — фундаментальная матрица решений уравнения $dx/d\tau = A(\tau)x$. В (2.5) интеграл понимается в смысле Лебега.

Следуя методу стохастического программного синтеза ([2],[6]) и принимая во внимание вид рассматриваемого функционала качества γ (1.2), введем величину стохастического программного максимина

$$\rho(\tau_*, w_*, \Delta_k\{\tau_j\}) = \sup_{v[\cdot]} \inf_{u[\cdot]} M\{\sum_{i=g(\tau_*)}^{N} \mu^{[i]}(w_{v[\cdot],u[\cdot]}[t^{[i]}, \omega])\}, \ t_0 \leq \tau_* < \vartheta, \tag{2.6}$$

где $M\{\ldots\}$ — математическое ожидание. Удобно перейти к двойственному описанию величины (2.6). Введем n-мерные векторные случайные величины $l^{[i]}(\omega), i = g(\tau_*), \ldots, N$, определенные на $\{\Omega, B, \mathrm{P}\}$. Рассмотрим также многомерные измеримые случайные величины $\mathbf{l}(\omega) = \{l^{[g(\tau_*)]}(\omega), \ldots, l^{[N]}(\omega)\}$, для которых $\max_{g(\tau_*)\le i\le N} vrai \max_{\omega\in\Omega} \mu^{*[i]}(l^{[i]}(\omega)) < \infty$. Здесь $\mu^{*[i]}(\cdot)$ — норма, сопряженная с нормой $\mu^{[i]}(\cdot)$, $i = g(\tau_*), \ldots, N$. Положим

$$\|\mathbf{l}(\cdot)\|^* = \max_i vrai \max_{\omega\in\Omega} \mu^{*[i]}(l^{[i]}(\omega)),\ i = g(\tau_*), \ldots, N. \tag{2.7}$$

Пусть

$$h(\tau) = \max\{i\ : t^{[i]} \le \tau\},\ \tau \in [\tau_*, \vartheta). \tag{2.8}$$

Если нет ни одного номера i такого, что $t^{[i]} \le \tau$, полагаем $h(\tau) = 0$.

Обозначим

$$m_{(\tau_*)}(\mathbf{l}(\cdot)) = \sum_{i=g(\tau_*)}^{N} X^T[t^{[i]}, \vartheta] M\{l^{[i]}(\omega)\}, \tag{2.9}$$

$$m^{(\tau_j)}(\mathbf{l}(\cdot); \xi_1, \ldots, \xi_j) = \sum_{i=h(\tau_j)+1}^{N} X^T[t^{[i]}, \vartheta] M\{l^{[i]}(\omega) | \xi_1, \ldots, \xi_j\}, \tag{2.10}$$

$$j = 1, \ldots, k.$$

Здесь $M\{\ldots \mid \ldots\}$ — условное математическое ожидание.

Определим величину программного экстремума

$$e(\tau_*, w_*, \Delta_k\{\tau_j\}) = \sup_{\|\mathbf{l}(\cdot)\|^*\le 1} \chi(\tau_*, w_*, \Delta_k\{\tau_j\}, \mathbf{l}(\cdot)),\ t_0 \le \tau_* < \vartheta. \tag{2.11}$$

Здесь

$$\chi(\tau_*, w_*, \Delta_k\{\tau_j\}, \mathbf{l}(\cdot)) = \langle m_{(\tau_*)}(\mathbf{l}(\cdot)), X[\vartheta, \tau_*] w_*\rangle +$$

$$+ M\{\sum_{j=1}^{k} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \max_{v\in Q} \min_{u\in P} \langle m^{(\tau_j)}(\mathbf{l}(\cdot); \xi_1, \ldots, \xi_j), X[\vartheta, \tau](B(\tau)u + C(\tau)v)\rangle d\tau\}, \tag{2.12}$$

где $\langle \ldots, \ldots \rangle$ — скалярное произведение векторов.

Проверим, что для всякой исходной позиции $\{\tau_*, w_*\}$, $\tau_* \in [t_0, \vartheta)$ при всяком разбиении $\Delta_k\{\tau_j\}$ (2.2) справедливо равенство

$$\rho(\tau_*, w_*, \Delta_k\{\tau_j\}) = e(\tau_*, w_*, \Delta_k\{\tau_j\}). \tag{2.13}$$

Пусть зафиксирована какая-нибудь допустимая стохастическая программа $v[\cdot]$ (2.4). Каждой допустимой программе $u[\cdot]$ (2.3) соответствует многомерная измеримая случайная величина $\mathbf{z}(\cdot) = \{\mathbf{z}(\omega), \omega \in \Omega\}$,

$$\mathbf{z}(\omega) = \{w^{[g(\tau_*)]}(\omega), \ldots, w^{[N]}(\omega)\}, w^{[i]}(\omega) = w_{v[\cdot],u[\cdot]}[t^{[i]}, \omega],\ i = g(\tau_*), \ldots, N,$$

для которой $\int_\Omega \sum_{i=g(t_*)}^{N} \mu^{[i]}(w^{[i]}(\omega)) \mathrm{P}(d\omega) < \infty$. Перебирая все допустимые стохастические программы $u[\cdot]$ (2.3), получим множество $Z(v[\cdot])$ таких вектор-функций $\mathbf{z}(\cdot)$. Это множество будет непустым и выпуклым. Теперь $\rho(\cdot)$ (2.6) запишем в виде

$$\rho(\tau_*, w_*, \Delta_k\{\tau_j\}) = \sup_{v[\cdot]} \inf_{\mathbf{z}(\cdot)\in Z(v[\cdot])} M\{\sum_{i=g(t_*)}^{N} \mu^{[i]}(w^{[i]}(\omega))\}. \qquad (2.14)$$

Величина, стоящая под знаком inf в (2.14), является нормой $\|\mathbf{z}(\cdot)\|$ стохастической вектор-функции $\mathbf{z}(\cdot)$. Обозначим

$$(\mathbf{l}(\cdot), \mathbf{z}(\cdot)) = \int_\Omega \sum_{i=g(\tau_*)}^{N} \left\langle l^{[i]}(\omega), w^{[i]}(\omega)\right\rangle \mathrm{P}(d\omega). \qquad (2.15)$$

Можно проверить, что справедливо равенство

$$\|\mathbf{z}(\cdot)\| = \sup_{\|\mathbf{l}(\cdot)\|^*\le 1} (\mathbf{l}(\cdot), \mathbf{z}(\cdot)). \qquad (2.16)$$

Из теоремы Рисса об общем виде линейного функционала [11, с.252] следует, что любой линейный функционал, определенный на элементах $\mathbf{z}(\cdot)$ рассматриваемого пространства вектор-функций с нормой $\|\mathbf{z}(\cdot)\| < \infty$, представим в виде (2.15) при некотором $\mathbf{l}(\cdot)$, $\|\mathbf{l}(\cdot)\|^* < \infty$.

Покажем, что для всякой программы $v[\cdot]$ (2.4) имеет место равенство

$$\inf_{\mathbf{z}(\cdot)\in Z(v[\cdot])} \sup_{\|\mathbf{l}(\cdot)\|^*\le 1} (\mathbf{l}(\cdot), \mathbf{z}(\cdot)) = \sup_{\|\mathbf{l}(\cdot)\|^*\le 1} \inf_{\mathbf{z}(\cdot)\in Z(v[\cdot])} (\mathbf{l}(\cdot), \mathbf{z}(\cdot)). \qquad (2.17)$$

Очевидно выполнение неравенства

$$\inf_{\mathbf{z}(\cdot)\in Z(v[\cdot])} \sup_{\|\mathbf{l}(\cdot)\|^*\le 1} (\mathbf{l}(\cdot), \mathbf{z}(\cdot)) \ge \sup_{\|\mathbf{l}(\cdot)\|^*\le 1} \inf_{\mathbf{z}(\cdot)\in Z(v[\cdot])} (\mathbf{l}(\cdot), \mathbf{z}(\cdot)). \qquad (2.18)$$

С другой стороны, для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется случайная величина $\mathbf{l}^{[\varepsilon]}(\cdot)$ с нормой $\|\mathbf{l}^{[\varepsilon]}(\cdot)\|^* \le 1$, для которой верно неравенство

$$\inf_{\mathbf{z}(\cdot)\in Z(v[\cdot])} \left(\mathbf{l}^{[\varepsilon]}(\cdot), \mathbf{z}(\cdot)\right) \ge \inf_{\mathbf{z}(\cdot)\in Z(v[\cdot])} \sup_{\|\mathbf{l}(\cdot)\|^*\le 1} (\mathbf{l}(\cdot), \mathbf{z}(\cdot)) - \varepsilon. \qquad (2.19)$$

Действительно, достаточно рассмотреть случай, когда величина в правой части (2.19) положительна. Иначе (2.19) верно при $\|\mathbf{l}^{[\varepsilon]}(\cdot)\|^* = 0$. Наряду с $Z(v[\cdot])$ в пространстве вектор-функций $\mathbf{z}(\cdot)$ расмотрим множество

$$S^\varepsilon = \{\mathbf{z}(\cdot) : \|\mathbf{z}(\cdot)\| \le \inf_{\mathbf{z}(\cdot)\in Z(v[\cdot])} \sup_{\|\mathbf{l}(\cdot)\|^*\le 1} (\mathbf{l}(\cdot), \mathbf{z}(\cdot)) - \varepsilon\}. \qquad (2.20)$$

Множество S^ε является непустым выпуклым телом и не имеет с множеством $Z(v[\cdot])$ общих точек. В силу теоремы (см. [11, с.107]) множества S^ε и $Z(v[\cdot])$

можно разделить линейным функционалом. Следовательно, найдется такая случайная величина $\mathbf{l}^{[\varepsilon]}(\cdot)$, $||\mathbf{l}^{[\varepsilon]}(\cdot)||^* = 1$, что будет справедливо неравенство

$$\inf_{\mathbf{z}(\cdot)\in Z(v[\cdot])} \left(\mathbf{l}^{[\varepsilon]}(\cdot), \mathbf{z}(\cdot)\right) \geq \sup_{\mathbf{z}(\cdot)\in S^\varepsilon} \left(\mathbf{l}^{[\varepsilon]}(\cdot), \mathbf{z}(\cdot)\right). \tag{2.21}$$

Вычисляя правую часть (2.21), согласно (2.15) и (2.20), получим (2.19). Из (2.18) и (2.19) при учете неравенства

$$\sup_{||\mathbf{l}(\cdot)||^*\leq 1} \inf_{\mathbf{z}(\cdot)\in Z(v[\cdot])} (\mathbf{l}(\cdot), \mathbf{z}(\cdot)) \geq \inf_{\mathbf{z}(\cdot)\in Z(v[\cdot])} \left(\mathbf{l}^{[\varepsilon]}(\cdot), \mathbf{z}(\cdot)\right)$$

получаем (2.17). Далее, принимая во внимание (2.15), (2.5), неупреждаемость программ (2.3), (2.4) и формулу повторных математических ожиданий, вычисляем

$$\begin{aligned}(\mathbf{l}(\cdot), \mathbf{z}(\cdot)) &= \langle m_{(\tau_*)}(\mathbf{l}(\cdot)), X[\vartheta, \tau_*]w_*\rangle + \\ + M\{\sum_{j=1}^{k} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} &\langle m^{(\tau_j)}(\mathbf{l}(\cdot); \xi_1, \ldots, \xi_j), X[\vartheta, \tau](B(\tau)u[\tau, \xi_1, \ldots, \xi_j] + \\ &+ C(\tau)v[\tau, \xi_1, \ldots, \xi_j])\rangle d\tau\}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Построим программы $u^0[\cdot]$, $v^0[\cdot]$ из условий

$$\begin{aligned}&\langle m^{(\tau_j)}(\mathbf{l}(\cdot); \xi_1, \ldots, \xi_j), X[\vartheta, \tau]B(\tau)u^0[\tau, \omega]\rangle = \\ &= \min_{u\in P}\langle m^{(\tau_j)}(\mathbf{l}(\cdot); \xi_1, \ldots, \xi_j), X[\vartheta, \tau]B(\tau)u\rangle,\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}&\langle m^{(\tau_j)}(\mathbf{l}(\cdot); \xi_1, \ldots, \xi_j), X[\vartheta, \tau]C(\tau)v^0[\tau, \omega] = \\ &= \max_{v\in Q}\langle m^{(\tau_j)}(\mathbf{l}(\cdot); \xi_1, \ldots, \xi_j), X[\vartheta, \tau]C(\tau)v\rangle.\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\tau_j \leq \tau < \tau_{j+1}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Так построенные программы обладают требуемым свойством неупреждаемости. Поэтому из (2.11), (2.22)–(2.24) вытекает равенство

$$\sup_{v[\cdot]} \inf_{\mathbf{z}(\cdot)\in Z(v[\cdot])} (\mathbf{l}(\cdot), \mathbf{z}(\cdot)) = \chi(\tau_*, w_*, \Delta_k\{\tau_j\}, \mathbf{l}(\cdot)). \tag{2.25}$$

Из (2.14), (2.16), (2.17), используя возможность перестановки местами двух операций взятия верхней грани и учитывая (2.25), получаем равенство

$$\begin{aligned}\rho(\tau_*, w_*, \Delta_k\{\tau_j\}) &= \sup_{v[\cdot]} \inf_{\mathbf{z}(\cdot)\in Z(v[\cdot])} \sup_{||\mathbf{l}(\cdot)||^*\leq 1} (\mathbf{l}(\cdot), \mathbf{z}(\cdot)) = \\ = \sup_{||\mathbf{l}(\cdot)||^*\leq 1} \sup_{v[\cdot]} \inf_{\mathbf{z}(\cdot)\in Z(v[\cdot])} (\mathbf{l}(\cdot), \mathbf{z}(\cdot)) &= \sup_{||\mathbf{l}(\cdot)||^*\leq 1} \chi(\tau_*, w_*, \Delta_k\{\tau_j\}, \mathbf{l}(\cdot)),\end{aligned}$$

которое, согласно (2.11), доказывает равенство (2.13).

Обратимся теперь к случаю, когда $\{\tau_*, w_*\} \in K$, $\tau_* = \vartheta$. В этом случае величины $\rho(\cdot)$ и $e(\cdot)$ определим формально равенством

$$\rho(\vartheta, w_*, \Delta_k\{\tau_j\}) = e(\vartheta, w_*, \Delta_k\{\tau_j\}) = \mu^{[N]}(w_*),$$

в котором теперь символом $\Delta_k\{\tau_j\}$ обозначено множество, состоящее из одной точки $\{\tau_1 = \tau_* = \vartheta\}$.

3. Цена игры

Обсудим свойства величины $e(\cdot)$. Пусть реализовалась позиция $\{\tau_*, w_*\}$ из K, $\tau_* \in [t_0, \vartheta)$. Будем полагать далее, что разбиение $\Delta_k\{\tau_j\}$ выбирается с достаточно малым шагом, при котором для любых моментов $t^{[i]}$, $t^{[i+1]}$, $i = g(\tau_*), \ldots, N-1$ найдется такой момент $\tau_{j^*} \in \Delta_k\{\tau_j\}$, что $\tau_{j^*} \in (t^{[i]}, t^{[i+1]})$. Пусть $\tau^* = \tau_2 \in \Delta_k\{\tau_j\}$. Возможны два случая. В первом случае, когда $g(\tau^*) = g(\tau_*)$, момент τ_* не совпадает ни с одним из моментов $t^{[i]}$. Во втором случае, когда $g(\tau^*) = g(\tau_*)+1$, имеем $\tau_* = t^{[g(\tau_*)]}$. Пусть $\{\tau^*, w^* = w[\tau^*]\} \in K$ — позиция, получаемая в момент $\tau = \tau^*$ на некотором движении $w[\tau]$, $\tau_* \leq \tau \leq \tau^*$ модели (2.1) под воздействием пары допустимых управлений $u[\tau] \in P$, $v[\tau] \in Q$, $\tau_* \leq \tau \leq \tau^*$. Для отрезка $[\tau^*, \vartheta]$ назначим разбиение $\Delta^*_{k^*}\{\tau^*_p\}$, $\tau^*_1 = \tau^*, \ldots, \tau^*_{k^*+1} = \vartheta$, так что $\tau^*_p = \tau_j$, $p = j-1$, $p = 1, \ldots, k^*$; $k^* = k-1$ (в случае $\tau^* = \vartheta$ символом $\Delta^*_{k^*}\{\tau^*_p\}$ обозначим множество, состоящее из одной точки $\{\tau^*_1 = \tau^* = \vartheta\}$). Вычислим величину $e(\tau^*, w^*, \Delta^*_{k^*}\{\tau^*_p\})$. По определению (2.11) этой величины имеем

$$e(\tau^*, w^*, \Delta^*_{k^*}\{\tau^*_p\}) = \sup_{||\mathbf{l}^*(\cdot)||^* \leq 1} \chi(\tau^*, w^*, \Delta^*_{k^*}\{\tau^*_p\}, \mathbf{l}^*(\cdot)), \ t_0 \leq \tau^* < \vartheta, \tag{3.1}$$

где

$$\chi(\tau^*, w^*, \Delta^*_{k^*}\{\tau^*_p\}, \mathbf{l}^*(\cdot)) = \langle m_{(\tau^*)}(\mathbf{l}^*(\cdot)), X[\vartheta, \tau^*]w^*\rangle +$$
$$+ M\{\sum_{p=1}^{k^*} \int_{\tau^*_p}^{\tau^*_{p+1}} \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle m^{(\tau^*_p)}(\mathbf{l}^*(\cdot); \xi^*_1, \ldots, \xi^*_p), X[\vartheta, \tau](B(\tau)u + C(\tau)v)\rangle d\tau\}. \tag{3.2}$$

При этом $\omega^* = \{\xi^*_1, \ldots, \xi^*_{k^*}\}$ — элементарное событие из вероятностного пространства $\{\Omega^*, B^*, \mathrm{P}^*\}$. Здесь $\xi^*_p \in [0,1]$ — равномерно распределенные случайные величины, связанные с моментами τ^*_p, $p = 1, \ldots, k^*$, $k^* = k-1$, $\Omega^* = \{\omega^*\}$ — единичный куб в k^*-мерном пространстве, B^* — борелевская σ-алгебра для этого куба, $\mathrm{P}^* = \mathrm{P}^*(\mathrm{B}^*)$ — мера Лебега. Символ $\mathbf{l}^*(\cdot)$ означает векторную случайную величину $\mathbf{l}^*(\cdot) = \{l^{*[g(\tau^*)]}(\omega^*), \ldots, l^{*[N]}(\omega^*), \quad \omega^* \in \Omega^*\}$ с нормой

$$||\mathbf{l}^*(\cdot)||^* = \max_i vray \max_{\omega^* \in \Omega^*} \mu^{*[i]}(l^{*[i]}(\omega^*)), \quad i = g(\tau^*), \ldots, N. \tag{3.3}$$

Справедливо следующее утверждение об u-стабильности величины $e(\cdot)$ (2.11).

Лемма 3.1. *Пусть реализовалась позиция $\{\tau_*, w_*\}$ и назначено разбиение $\Delta_k\{\tau_j\}$ (2.2) отрезка $[\tau_*, \vartheta]$. Тогда для всякой допустимой реализации управления $v_*[\tau_*[\cdot]\tau^*) = \{v[\tau] \in Q, \quad \tau_* \le \tau < \tau^*\}$, где $\tau^* = \tau_2 \in \Delta_k\{\tau_j\}$, найдется такое допустимое управление $u[\tau_*[\cdot]\tau^*) = \{u[\tau] \in P, \quad \tau_* \le \tau < \tau^*\}$, что при движении системы (2.1) из позиции $\{\tau_*, w_*\}$ под действием этих управлений реализуется позиция $\{\tau^*, w^* = w[\tau^*]\}$, для которой имеем*

$$e(\tau^*, w^*, \Delta^*_{k^*}\{\tau^*_p\}) - e(\tau_*, w_*, \Delta_k\{\tau_j\}) \le 0, \tag{3.4}$$

если $\tau_* < \tau^* \le t^{[g(\tau_*)]}$ (когда $g(\tau^*) = g(\tau_*)$), или

$$e(\tau^*, w^*, \Delta^*_{k^*}\{\tau^*_p\}) - e(\tau_*, w_*, \Delta_k\{\tau_j\}) \le -\mu^{[g(\tau_*)]}(w_*), \tag{3.5}$$

если $t^{[g(\tau_*)]} = \tau_* < \tau^*$ (когда $g(\tau^*) = g(\tau_*) + 1$).

Доказательство. Следует рассмотреть четыре возможных случая:

1) $t^{[g(\tau_*)]} = \tau_* < \tau^*$;
2) $\tau_* < \tau^* \le t^{[g(\tau_*)]} \ne \vartheta$;
3) $\tau_* < \tau^* = t^{[g(\tau_*)]} = \vartheta$;
4) $\tau_* < \tau^* < t^{[g(\tau_*)]}$.

Приведем здесь схему доказательства в наиболее сложном первом случае. Пусть $W = W(\tau^*; \tau_*, w_*, v_*[\tau_*[\cdot]\tau^*))$ — область достижимости к моменту времени τ^* для движений $w[\tau_*[\cdot]\tau^*]$, порожденных фиксированным управлением $v_*[\tau_*[\cdot]\tau^*)$ и каким угодно допустимым $u[\tau_*[\cdot]\tau^*)$ с ним в паре. Это множество будет непустым выпуклым компактом в R^n. Рассмотрим также множество

$$G = \{m^* : \ m^* = \sum_{i=g(\tau^*)}^{N} X^T[t^{[i]}, \vartheta] l^{[i]}, \ \mu^{*[i]}(l^{[i]}) \le 1, \ i = g(\tau^*), \ldots, N\}, \tag{3.6}$$

которое является непустым выпуклым компактом в R^n. Здесь символами $l^{[i]}$ обозначены детерминированные n-мерные векторы. Покажем, что найдется пара $\{m^*_0, w^*_0\}$, $m^*_0 \in G$, $w^*_0 \in W$, удовлетворяющая следующим двум условиям.

(i) Существует последовательность случайных величин $\{\mathbf{l}^*_{(s)}(\cdot)\}$, для которой выполняется равенство

$$e(\tau^*, w^*_0, \Delta^*_{k^*}\{\tau^*_p\}) = \lim_{s\to\infty} \chi(\tau^*, w^*_0, \Delta^*_{k^*}\{\tau^*_p\}, \mathbf{l}^*_{(s)}(\cdot)) \tag{3.7}$$

и для которой существует предел

$$m^*_0 = \lim_{s\to\infty} m^{*(s)}, \quad m^{*(s)} = m_{(\tau^*)}(\mathbf{l}^*_{(s)}(\cdot)). \tag{3.8}$$

(ii) Выполняется равенство

$$\langle m_0^*, X[\vartheta, \tau^*] w_0^* \rangle = \min_{w \in W} \langle m_0^*, X[\vartheta, \tau^*] w \rangle. \tag{3.9}$$

Действительно, построим отображение из $D = G \times W$ в D. Каждому вектору $w^* \in W$ поставим в соответствие множество $G^0(\tau^*, w^*, \Delta_{k^*}^*\{\tau_p^*\}) \subset G$ (3.6) всех возможных векторов m_0^*, удовлетворяющих (i) при $w_0^* = w^*$. Можно показать, что множество $G^0(\tau^*, w^*, \Delta_{k^*}^*\{\tau_p^*\})$ является непустым выпуклым компактом в R^n и изменяется полунепрерывно сверху по включению при изменении w^*. Каждому $m^* \in G$ поставим в соответствие множество $W^0(m^*) \subset W$ всех векторов w_0^*, удовлетворяющих условию (ii), при замене в (3.9) m_0^* на m^*. Множество $W^0(m^*)$ — непустой выпуклый компакт в R^n и изменяется полунепрерывно сверху по включению при изменении m^*. Таким образом, каждой паре $\{m^*, w^*\} \in D$ соответствует множество $R[m^*, w^*] \subset D$ пар $\{m_{(1)}^*, w_{(1)}^*\}$, $m_{(1)}^* \in G^0(\tau^*, w^*, \Delta_{k^*}^*\{\tau_p^*\})$, $w_{(1)}^* \in W^0(m^*)$. В силу теоремы Какутани (см. [12, с.973]), построенное отображение имеет неподвижную точку $\{m_0^*, w_0^*\} \in D$, для которой выполнены условия (i) и (ii).

Пусть $u^0[\tau_*[\cdot]\tau^*)$ — то допустимое управление, которое в паре с $v_*[\tau_*[\cdot]\tau^*)$ приводит в точку $w_0^* = w[\tau^*]$, т.е.

$$w_0^* = X[\tau^*, \tau_*] w_* + \int_{\tau_*}^{\tau^*} X[\tau^*, \tau](B(\tau) u^0[\tau] + C(\tau) v_*[\tau]) d\tau. \tag{3.10}$$

Тогда из (3.9), снова учитывая формулу Коши и определение области достижимости W, а также возможность внесения знака минимума под знак интеграла, получаем равенство

$$\int_{\tau_*}^{\tau^*} \langle m_0^*, X[\vartheta, \tau] B(\tau) u^0[\tau] \rangle d\tau = \int_{\tau_*}^{\tau^*} \min_{u \in P} \langle m_0^*, X[\vartheta, \tau] B(\tau) u \rangle d\tau. \tag{3.11}$$

Оценим $\Delta e = e(\tau^*, w_0^*, \Delta_{k^*}^*\{\tau_p^*\}) - e(\tau_*, w_*, \Delta_k\{\tau_j\})$.

Определим вектор l_0, $l_0 \in R^n$ из условия

$$\langle l_0, w_* \rangle = \max_{l \in L} \langle l_0, w_* \rangle = \mu^{[g(\tau_*)]}(w_*), \tag{3.12}$$

где $L = \{l : \ \mu^{*[g(\tau_*)]}(l) \leq 1\}$.

Максимизирующей последовательности $\{\mathbf{l}_{(s)}^*(\cdot), s = 1, 2, \ldots\}$ (которая, согласно (i), отвечает вектору w_0^*) поставим в соответствие последовательность случайных векторных величин $\{\hat{\mathbf{l}}_{(s)}(\cdot), s = 1, 2, \ldots\}$:

$$\hat{\mathbf{l}}_{(s)}(\cdot) = \{\hat{l}_{(s)}^{[g(\tau_*)]}(\omega), \ldots, \hat{l}_{(s)}^{[N]}(\omega), \ \omega \in \Omega\},$$

$$\hat{l}^{[g(\tau_*)]}_{(s)}(\omega) = l_0,\ \hat{l}^{[i]}_{(s)}(\omega) = l^{*[i]}_{(s)}(\omega^*),\ i = g(\tau_*) + 1, \ldots, N,\ s = 1, 2, \ldots, \tag{3.13}$$

где случайные величины $\xi^*_1, \ldots, \xi^*_{k^*}$ из набора $\{\xi^*_1, \ldots, \xi^*_{k^*}\} = \omega^*$ трактуются как компоненты $\xi_2, \ldots, \xi_k$ из набора $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\} = \omega$, т.е. в (3.13) полагаем

$$\xi^*_p = \xi_{p+1}, \quad p = 1, \ldots, k^*; \quad k^* = k - 1. \tag{3.14}$$

В рассматриваемом случае из (1.3) и (2.8) следует, что $h(\tau^*) = h(\tau_*) = g(\tau_*)$. Поэтому из (3.13) и (2.9), (2.10) для каждого $s = 1, 2, \ldots$ вытекают равенства

$$m_{(\tau_*)}(\hat{\mathbf{l}}_{(s)}(\cdot)) = X^T[\tau_*, \vartheta]l_0 + m^{*(s)}, \quad m^{(\tau_1)}(\hat{\mathbf{l}}_{(s)}(\cdot); \xi_1) = m^{*(s)}, \tag{3.15}$$

$$m^{(\tau_j)}(\hat{\mathbf{l}}_{(s)}(\cdot); \xi_1, \ldots, \xi_j) = m^{(\tau^*_{j-1})}(\mathbf{l}^*_{(s)}(\cdot); \xi^*_1, \ldots, \xi^*_{j-1}), \quad j = 2, \ldots, k, \tag{3.16}$$

где, как и в (3.13), подразумевается выполненным условие (3.14). Теперь, учитывая определения $e(\tau_*, w_*, \Delta_k\{\tau_j\})$ (2.11) и $\{\hat{\mathbf{l}}_{(s)}(\cdot),\ s = 1, 2, \ldots\}$ (3.13), а также правило взятия повторных математических ожиданий и соотношения (3.14)–(3.16), для любого номера $s = 1, 2, \ldots$ получаем следующую цепочку соотношений:

$$\begin{gathered} e(\tau_*, w_*, \Delta_k\{\tau_j\}) \geq \\ \geq \chi(\tau_*, w_*, \Delta_k\{\tau_j\}, \hat{\mathbf{l}}_{(s)}(\cdot)) = \langle m^{*(s)} + X^T[\tau_*, \vartheta]l_0, X[\vartheta, \tau_*]w_*\rangle + \\ + \int_{\tau_*}^{\tau^*} \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle m^{*(s)}, X[\vartheta, \tau](B(\tau)u + C(\tau)v)\rangle d\tau + \\ + M\{\sum_{p=1}^{k^*} \int_{\tau^*_p}^{\tau^*_{p+1}} \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle m^{(\tau^*_p)}(\mathbf{l}^*_{(s)}(\cdot); \xi^*_1, \ldots, \xi^*_p), X[\vartheta, \tau](B(\tau)u + C(\tau)v)\rangle d\tau\}. \end{gathered} \tag{3.17}$$

С другой стороны, согласно (3.7), последовательность $\{\mathbf{l}^*_s(\cdot),\ s = 1, 2, \ldots\}$ удовлетворяет условию

$$\chi(\tau^*, w^*, \Delta^*_{k^*}\{\tau^*_p\}, \mathbf{l}^*_s(\cdot)) \geq e(\tau^*, w^*_0, \Delta^*_{k^*}\{\tau^*_p\}) - \varepsilon_s, \tag{3.18}$$

где $\varepsilon_s > 0 \quad (s = 1, 2, \ldots)$ и $\lim_{s\to\infty} \varepsilon_s = 0$. Учитывая (3.17), (3.18) и (3.1), для любого номера s=1,2,... получаем неравенство

$$\begin{gathered} \Delta e \leq \langle m^{*(s)}, X[\vartheta, \tau^*]w^*_0\rangle - \langle m^{*(s)} + X^T[\tau_*, \vartheta]l_0, X[\vartheta, \tau_*]w_*\rangle - \\ - \int_{\tau_*}^{\tau^*} \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle m^{*(s)}, X[\vartheta, \tau](B(\tau)u + C(\tau)v)\rangle d\tau + \varepsilon_s. \end{gathered} \tag{3.19}$$

При этом, в силу (3.8), последовательность $\{m^{*(s)},\ s = 1, 2, \ldots\}$ сходится и имеет предел m^*_0. Предельным переходом в (3.19) при $s \to \infty$, используя (3.10), получаем оценку

$$\Delta e \leq -\langle l_0, w_*\rangle + \int_{\tau_*}^{\tau^*} \langle m^*_0, B(\tau)u^0[\tau]\rangle d\tau - \int_{\tau_*}^{\tau^*} \min_{u \in P} \langle m^*_0, B(\tau)u)\rangle d\tau,$$

которая, в силу (3.11), (3.12), дает неравенство (3.5). Доказательство u-стабильности в других случаях проводится по приведенной схеме с понятными изменениями. Итак, лемма 3.1 доказана.

Рассмотрим теперь предельный переход в обсуждаемых конструкциях при измельчении шага $\Delta_k\{\tau_j\}$. Обозначим через $\{\Delta_k\}$ последовательность разбиений $\Delta_k\{\tau_j^{(k)}\} = \{\tau_j^{(k)} : \tau_1^{(k)} = t_*, \ \tau_j^{(k)} < \tau_{j+1}^{(k)}, \ \tau_{k+1}^{(k)} = \vartheta\}$ отрезка $[t_*, \vartheta]$ (при этом все точки $t^{[i]}$, $t^{[i]} \geq t_*$ включены в каждое разбиение $\Delta_k\{\tau_j^{(k)}\}$), удовлетворяющую условию

$$\delta_k = \max_j(\tau_{j+1}^k - \tau_j^{(k)}), \quad \lim_{k\to\infty} \delta_k = 0. \tag{3.20}$$

Используя лемму 3.1, равенство (2.13) и определения (2.6), (2.11) и следуя схеме доказательства, приведенного в [2, с.323], приходим к следующему утверждению, выражающему оценку цены игры $\rho^0(t_*, x_*)$ через стохастический программный максимин $\rho(t_*, x_*, \Delta_k\{\tau_j^{(k)}\})$ сверху.

Лемма 3.2. *Для любой начальной позиции* $\{\tau_*, w_*\} = \{t_*, x_*\}$ *и последовательности разбиений* $\{\Delta_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, (3.20) *справедливо соотношение*

$$\varliminf_{k\to\infty} \rho(t_*, x_*, \Delta_k\{\tau_j^{(k)}\}) = \varliminf_{k\to\infty} e(t_*, x_*, \Delta_k\{\tau_j^{(k)}\}) \geq \rho^0(t_*, x_*).$$

Используя равенство (2.13), определения (2.6) и (2.11) и следуя схеме доказательства, приведенного в [2, с.325], приходим к следующему утверждению, выражающему оценку цены игры $\rho^0(t_*, x_*)$ через стохастический программный максимин снизу.

Лемма 3.3. *Для любой начальной позиции* $\{\tau_*, w_*\} = \{t_*, x_*\}$ *и последовательности разбиений* $\{\Delta_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, (3.20) *справедливо соотношение*

$$\varlimsup_{k\to\infty} \rho(t_*, x_*, \Delta_k\{\tau_j^{(k)}\}) = \varlimsup_{k\to\infty} e(t_*, x_*, \Delta_k\{\tau_j^{(k)}\}) \leq \rho^0(t_*, x_*).$$

Из лемм 3.2 и 3.3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.1. *Каковы бы ни были исходная позиция* $\{\tau_*, w_*\} = \{t_*, x_*\}$ *и последовательность разбиений* $\{\Delta_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, (3.20), *справедливо равенство*

$$\lim_{k\to\infty} \rho(t_*, x_*, \Delta_k\{\tau_j^{(k)}\}) = \lim_{k\to\infty} e(t_*, x_*, \Delta_k\{\tau_j^{(k)}\}) = \rho^0(t_*, x_*),$$

где $\rho^0(t_*, x_*)$ — *цена рассматриваемой дифференциальной игры* (1.1)–(1.3).

Итак, вычисление цены игры сводится к вычислению $e(t_*, x_*, \Delta_k\{\tau_j\})$, которая, в свою очередь, представляет решение соответствующей стохастической задачи на максимум величины $\chi(t_*, x_*, \Delta_k\{\tau_j\}, \mathbf{l}(\cdot))$ (2.12).

4. Вычисление программного экстремума

Пусть реализовалась позиция $\{\tau_*, x_*\}$ и выбрано разбиение $\Delta_k\{\tau_j\}$ отрезка $[\tau_*, \vartheta]$. Для каждого номера $j = 1, \ldots, k$ определим

$$\Delta\psi_j(t_*, m) = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \max_{v\in Q} \min_{u\in P} \langle m, X[\vartheta, \tau](B(\tau)u + C(\tau)v)\rangle d\tau, \quad m \in R^n, \quad (4.1)$$

и области $G_j(t_*) \subset R^n$

$$G_j(t_*) = \{m_{(j)} : \ m_{(j)} = \sum_{i=h(\tau_j)+1}^{N} X^T[t^{[i]}, \vartheta]l^{[i]}, \ \mu^{*[i]}(l^{[i]}) \leq 1\}. \quad (4.2)$$

Здесь $l^{[i]}$, $i = h(\tau_j) + 1, \ldots, N$ — n-мерные детерминированные величины. Множества $G_j(t_*)$ — непустые выпуклые компакты в R^n.

Пусть в некоторой выпуклой компактной области $G_* \subset R^n$ определена скалярная функция $\psi(m)$. Символом $\varphi(m) = \{\psi(\cdot)\}^*_{G_*}$ будем обозначать выпуклую сверху оболочку функции $\psi(\cdot)$ в области G_*, т.е. функцию, минимальную из всех вогнутых функций, мажорирующих $\psi(m)$, $m \in G_*$.

Построим рекуррентную последовательность функций $\varphi_j(t_*, m_{(j)})$, где $m_{(j)} \in G_j(t_*)$, $j = k, \ldots, 1$. При $j = k$ полагаем

$$\psi_k(t_*, m_{(k)}) = \Delta\psi_k(t_*, m_{(k)}), \ \varphi_k(t_*, m_{(k)}) = \{\psi_k(\cdot)\}^*_{G_k(t_*)}, \ m_{(k)} \in G_k(t_*).$$

Далее по индукции. Пусть для $1 < j \leq k$ уже построена функция $\varphi_j(t_*, m_{(j)})$, $m_{(j)} \in G_j(t_*)$. Для $j-1$ определяем

$$\varphi_{j-1}(t_*, m_{(j-1)}) = \{\psi_{j-1}(\cdot)\}^*_{G_{j-1}(t_*)}, \ m_{(j-1)} \in G_{j-1}(t_*),$$

где в случае $h(\tau_j) = h(\tau_{j-1})$, $(t^{[h(\tau_j)]} \leq \tau_{j-1} < \tau_j)$ полагаем

$$\psi_{j-1}(t_*, m_{(j-1)}) = \Delta\psi_{j-1}(t_*, m_{(j-1)}) + \varphi_j(t_*, m_{(j-1)}), \quad (4.3)$$

а в случае $h(\tau_j) = h(\tau_{j-1}) + 1$, $(\tau_{j-1} < \tau_j = t^{[h(\tau_j)]})$ определяем

$$\psi_{j-1}(t_*, m_{(j-1)}) = \Delta\psi_{j-1}(t_*, m_{(j-1)}) + \varphi'_j(t_*, m_{(j-1)}). \quad (4.4)$$

Здесь

$$\varphi'_j(t_*, m_{(j-1)}) = \max_{m_{(j)}} \varphi_j(t_*, m_{(j)}), \quad (4.5)$$

где максимум берется при условии

$$m_{(j)} + X^T[t^{[h(\tau_j)]}, \vartheta]l = m_{(j-1)}, \ \mu^{*[h(\tau_j)]}(l) \leq 1, \ m_{(j)} \in G_j(t_*). \quad (4.6)$$

Из (2.12), (4.1) и определения области $G_1(t_*)$ (4.2) вытекает равенство

$$e(t_*, x_*, \Delta_k\{\tau_j\}) = \alpha(t_*, x_*) + \sup_{m_{(1)} \in G_1(t_*)} [\langle m_{(1)}, X[\vartheta, t_*]x_*\rangle +$$
$$+ \sup_{\mathbf{l}_{m_{(1)}}(\cdot)} M\{\sum_{j=1}^{k} \Delta\psi_j(t_*, m^{(\tau_j)}(\mathbf{l}_{m_{(1)}}(\cdot); \xi_1, \ldots, \xi_j))\}], \tag{4.7}$$

где

$$\alpha(t_*, x_*) = \begin{cases} \mu^{[g(t_*)]}(x_*), & t_* = t^{[g(t_*)]}, \\ 0, & t_* \neq t^{[g(t_*)]}. \end{cases} \tag{4.8}$$

В (4.7) внутренний sup вычисляется по случайным вектор-функциям

$$\mathbf{l}_{m_{(1)}}(\cdot) = \{l_{m_{(1)}}^{[h(t_*)+1]}(\cdot), \ldots, l_{m_{(1)}}^{[N]}(\cdot)\},$$
$$vrai \max\nolimits_{\omega \in \Omega} \mu^{*[i]}(l_{m_{(1)}}^{[i]}(\omega)) \leq 1, \; i = h(t_*) + 1, \ldots, N$$

таким, что $\sum_{i=h(t_*)+1}^{N} X^T[t^{[i]}, \vartheta] M\{l_{m_{(1)}}^{[i]}(\omega)\} = m_{(1)}$. Докажем равенство

$$\sup_{\mathbf{l}_{m_{(1)}}(\cdot)} M\{\sum_{j=1}^{k} \Delta\psi_j(t_*, m^{(\tau_j)}(\mathbf{l}_{m_{(1)}}(\cdot); \xi_1, \ldots, \xi_j))\}] = \varphi_1(t_*, m_{(1)}). \tag{4.9}$$

На измеримых по Борелю вектор-функциях

$$\mathbf{q}_{[j]}(\omega) = \mathbf{q}_{[j]}(\xi_j, \ldots, \xi_k) =$$
$$= \{q_{[j]}^{[h(\tau_j)+1]}(\xi_j, \ldots, \xi_k), \ldots, q_{[j]}^{[N]}(\xi_j, \ldots, \xi_k)\}, \; j = 1, \ldots, k, \; \omega \in \Omega,$$

удовлетворяющих условию

$$vrai \max_{\omega \in \Omega} \mu^{*[i]}(q_{[j]}^{[i]}(\xi_j, \ldots, \xi_k)) \leq 1, \; i = h(\tau_j) + 1, \ldots, N, \tag{4.10}$$

рассмотрим вспомогательные функционалы

$$g_j(t_*; \mathbf{q}_{[j]}(\cdot)) = \sum_{p=j}^{k} \int_{[\xi_j, \ldots, \xi_p]} \Delta\psi_p(t_*, m^{(\tau_p)}(\mathbf{q}_{[j]}(\cdot); \xi_j, \ldots, \xi_p)) d\xi_j \ldots d\xi_p, \tag{4.11}$$

где $j = 1, \ldots, k$. В (4.11) принято обозначение

$$m^{(\tau_p)}(\mathbf{q}_{[j]}(\cdot); \xi_j, \ldots, \xi_p) = \sum_{i=h(\tau_p)+1}^{N} X^T[t^{[i]}, \vartheta] M\{q_{[j]}^{[i]}(\xi_j, \ldots, \xi_k) \mid \xi_j, \ldots, \xi_p\}$$

при $j \leq p \leq k$. При $j = 1$ в (4.11) получаем равенство

$$g_1(t_*; \mathbf{q}_{[1]}(\cdot)) = \{\sum_{j=1}^{k} \Delta\psi_j(t_*, m^{(\tau_j)}(\mathbf{q}_{[1]}(\cdot); \xi_1, \ldots, \xi_j))\}. \tag{4.12}$$

Заметим, что для каждого $j = 1, \ldots, k$, в силу теоремы Каратеодори [13], для выпуклой сверху оболочки $\varphi_j(\cdot)$ функции $\psi_j(\cdot)$ в области $G_j(t_*)$ и для любого $m_{(j)} \in G_j(t_*)$ найдется по крайней мере по одному набору n-мерных векторов $r^{(s)}_{(j)} = r^{(s)}_{(j)}(m_{(j)})$, $r^{(s)}_{(j)} \in G_j(t_*)$, и чисел $\beta^{(s)}_{(j)} = \beta^{(s)}_{(j)}(m_{(j)})$, $\beta^{(s)}_{(j)} \geq 0$, $s = 1, \ldots, n+1$, $\sum_{s=1}^{n+1} \beta^{(s)}_{(j)} = 1$, связанных соотношениями

$$\sum_{s=1}^{n+1} \beta^{(s)}_{(j)} \psi_j(t_*; r^{(s)}_{(j)}) = \varphi_j(t_*, m_{(j)}), \tag{4.13}$$

$$\sum_{s=1}^{n+1} \beta^{(s)}_{(j)} r^{(s)}_{(j)} = m_{(j)}. \tag{4.14}$$

Кроме того, по набору $\{\beta^{(s)}_{(j)}\}_{s=1}^{n+1}$ найдется хотя бы один набор $\{L^{(s)}_j(\beta^{(s)}_{(j)})\}_{s=1}^{n+1}$ непересекающихся борелевских множеств отрезка $0 \leq \xi_j \leq 1$ таких, что

1) $\bigcup_{s=1}^{n+1} L^{(s)}_j(\beta^{(s)}_{(j)}) = [0, 1]$;

2) $L^{(s)}_j(\beta^{(s)}_{(j)})$ имеют лебегову меру $P_{\xi_j}(L^{(s)}_j(\beta^{(s)}_{(j)})) = \beta^{(s)}_{(j)}$, $s = 1, \ldots, n+1$.

Построим теперь рекуррентную последовательность функций

$$\mathbf{q}^0_{[j]}(m_{(j)}; \xi_j, \ldots, \xi_k) =$$
$$= \{q^{0[h(\tau_j)+1]}_{[j]}(m_{(j)}; \xi_j, \ldots, \xi_k), \ldots, q^{0[N]}_{[j]}(m_{(j)}; \xi_j, \ldots, \xi_k)\},\ j = 1, \ldots, k.$$

При $j = k$ полагаем

$$\mathbf{q}^0_{[k]}(m_{(k)}; \xi_k) = q^{0[N]}_{[k]}(m_{(k)}, \xi_k) = r^{(s)}_{(k)}, \tag{4.15}$$

если $\xi_k \in L^{(s)}_k(\beta^{(s)}_{(k)})$, $s = 1, \ldots, n+1$.

Далее продолжаем построение по индукции. Пусть при $1 < j \leq k$ уже построена $\mathbf{q}^0_{[j]}(m_{(j)}; \xi_j, \ldots, \xi_k)$, $m_{(j)} \in G_{(j)}(t_*)$, $0 \leq \xi_p \leq 1$, $p = j, \ldots, k$. Тогда, в случае когда $h(\tau_j) = h(\tau_{j-1})$, полагаем

$$\mathbf{q}^0_{[j-1]}(m_{(j-1)}; \xi_{j-1}, \xi_j, \ldots, \xi_k) = \mathbf{q}^0_{[j]}(r^{(s)}_{(j-1)}; \xi_j, \ldots, \xi_k), \tag{4.16}$$

если $\xi_{j-1} \in L^{(s)}_{j-1}(\beta^{(s)}_{(j-1)})$, $s = 1, \ldots, n+1$.

В случае когда $h(\tau_j) = h(\tau_j) + 1$, сначала каждому фиксированному вектору $r_{(j-1)} \in G_{j-1}(t_*)$ произвольным выбором поставим в соответствие пару векторов $\{l^0(r_{(j-1)}), m^0_{(j)}(r_{(j-1)})\}$, $\mu^{*[h(\tau_j)]}(l^0(r_{(j-1)})) \leq 1$, $m^0_{(j)}(r_{(j-1)}) \in G_j(t_*)$, решающую задачу на максимум в (4.5) при условии (4.6), если в (4.5), (4.6) положить $m_{(j-1)} = r_{(j-1)}$, затем определяем

$$\mathbf{q}^0_{[j-1]}(m_{(j-1)}; \xi_{j-1}, \xi_j, \ldots, \xi_k) = \{l^0(r^{(s)}_{(j-1)}), \mathbf{q}^0_{[j]}(m^0_{(j)}(r^{(s)}_{(j-1)}); \xi_j, \ldots, \xi_k)\}, \tag{4.17}$$

если $\xi_{j-1} \in L_{j-1}^{(s)}(\beta_{(j-1)}^{(s)})$, $s = 1, \ldots, n+1$.

Продолжая индукцию до $j = 1$, получим функцию $\mathbf{q}_{[1]}^0(m_{(1)}; \xi_1, \ldots \xi_k)$, $m_{(1)} \in G_{(1)}(t_*)$, $0 \le \xi_p \le 1$, $p = 1, \cdots, k$. Функции $\mathbf{q}_{[j]}^0(m_{(j)}; \xi_j, \ldots, \xi_k)$ при каждом $m_{(j)} \in G_{(j)}(t_*)$ являются конечнозначными по $\xi_j, \ldots, \xi_k$ и удовлетворяют (4.10). Покажем, что $\mathbf{q}_{[j]}^0(m_{(j)}; \cdot)$ для каждого $j = 1, \ldots, k$ обладают следующими свойствами.

$1^{(j)}$. Для любого вектора $m_{(j)} \in G_{(j)}(t_*)$ выполняется равенство

$$\int_{[\xi_j \ldots \xi_k]} \sum_{i=h(\tau_j)+1}^{N} X^T[t^{[i]}, \vartheta] q_{[j]}^{0[i]}(m_{(j)}; \xi_j, \ldots, \xi_k) d\xi_j \ldots d\xi_k = m_{(j)}. \tag{4.18}$$

$2^{(j)}$. Для любого вектора $m_{(j)} \in G_j(t_*)$ выполняется равенство

$$g_j(t_*; \mathbf{q}_{[j]}^0(m_{(j)}; \cdot)) = \varphi_j(t_*, m_{(j)}). \tag{4.19}$$

$3^{(j)}$. Для любого вектора $m_{(j)} \in G_j(t_*)$, для любых измеримых по Борелю функций $\mathbf{q}_{[j]}(\xi_j, \ldots, \xi_k)$, удовлетворяющих (4.10) и таких, что

$$\int_{[\xi_j \ldots \xi_k]} \sum_{i=h(\tau_j)+1}^{N} X^T[t^{[i]}, \vartheta] q_{[j]}^{[i]}(\xi_j, \ldots, \xi_k) d\xi_j \ldots d\xi_k = m_{(j)}, \tag{4.20}$$

выполняется неравенство

$$g_j(t_*; \mathbf{q}_{[j]}(\cdot)) \le g_j(t_*; \mathbf{q}_{[j]}^0(m_{(j)}; \cdot)). \tag{4.21}$$

Доказательство свойств $1^{(j)}$–$3^{(j)}$, $j = 1, \ldots, k$ проведем по индукции. Пусть $j = k$. Свойства $1^{(k)}$,$2^{(k)}$ вытекают непосредственно из определения $g_k(t_*; \mathbf{q}_{[k]}^0(m_{(k)}; \cdot))$ (4.11) и построения $\mathbf{q}_{[k]}^0(m_{(k)}; \cdot))$ (4.15), если учесть (4.13) и (4.14) при $j = k$. Проверим, что выполняется свойство $3^{(k)}$. Возьмем любую измеримую по Борелю вектор-функцию $\mathbf{q}_{[k]}(\xi_k)$, удовлетворяющую (4.10) при $j = k$. Она определена на вероятностном пространстве $\{\Omega_{\xi_k}, B_{\xi_k}, \mathrm{P}_{\xi_k}\}$, где Ω_{ξ_k} — единичный отрезок, B_{ξ_k} — борелевская σ-алгебра на этом отрезке, P_{ξ_k} — мера Лебега. Рассмотрим также вероятностное пространство $\{\Omega_{r_k}, B_{r_k}, \mathrm{P}_{r_k}\}$, где $\Omega_{r_k} = G_{(k)}(t_*)$, B_{r_k} — борелевская σ-алгебра на Ω_{r_k}, P_{r_k} — мера Лебега. Из вогнутости $\varphi_k(t_*, m_{(k)})$, $m_{(k)} \in G_{(k)}(t_*)$, неравенства Иенсена (см. [14, с.209]), а также неравенства $\varphi_k(t_*, m_{(k)}) \ge \psi_k(t_*, m_{(k)})$, $m_{(k)} \in G_k(t_*)$ следует, что для любой вероятностной меры $\beta(dr \mid m_{(k)})$ такой, что

$$\int_{r \in G_k(t_*)} r \beta(dr \mid m_{(k)}) = m_{(k)}, \tag{4.22}$$

выполняется соотношение

$$\int_{r\in G_k(t_*)} \psi_k(r)\beta(dr \mid m_{(k)}) \le \varphi_k(t_*, m_{(k)}). \tag{4.23}$$

Применяя теорему о замене переменных под знаком интеграла Лебега (см. [14], с.213), получаем, что существует мера $\beta^*(dr \mid m_{(k)})$ такая, что

$$\int_{[\xi_k]} q_{[k]}^{[N]}(\xi_k)d\xi_k = \int_{r\in G_k(t_*)} r\beta^*(dr \mid m_{(k)}) = m_{(k)},$$
$$\int_{[\xi_k]} \psi_k(t_*, q_{[k]}^{[N]}(\xi_k))d\xi_k = \int_{r\in G_k(t_*)} \psi_k(r)\beta^*(dr \mid m_{(k)}).$$

В силу (4.11), (4.19), (4.20) при $j = k$ и (4.22), (4.23), это доказывает свойство $3^{(k)}$. Предположим теперь, что при $1 < j \le k$ выполняются свойства $1^{(j)}$–$3^{(j)}$. Покажем, что тогда имеют место свойства $1^{(j-1)}$–$3^{(j-1)}$ для $\mathbf{q}^0_{[j-1]}(m_{(j-1)};\cdot)$, $m_{(j-1)} \in G_{j-1}(t_*)$. Доказательство проведем в наиболее сложном случае, когда $h(\tau_j) = h(\tau_{j-1}) + 1$. Докажем сначала $1^{(j-1)}$. Возьмем любую точку $m_{(j-1)} \in G_{j-1}(t_*)$. Применяя теорему Фубини (см. [14, с.215]) при переходе от интегрирования по области $[\xi_{j-1}, \xi_j \dots \xi_k]$ к повторному интегрированию сначала по области $[\xi_j \dots \xi_k]$, а потом по $[\xi_{j-1}]$, учитывая построение (4.17), свойство $1^{(j)}$ и соотношение (4.14), получаем

$$\int\limits_{[\xi_{j-1},\xi_j\dots\xi_k]} \sum_{i=h(\tau_{j-1})+1}^{N} X^T[t^{[i]},\vartheta]q^{0[i]}_{[j-1]}(m_{(j-1)},\xi_{j-1},\xi_j,\dots,\xi_k)d\xi_{j-1}\dots d\xi_k =$$
$$= \sum_{s=1}^{n+1} \beta^{(s)}_{(j-1)}[X^T[t^{[h(\tau_j)]},\vartheta]l^0(r^{(s)}_{(j-1)}) + m^0_{(j)}(r^{(s)}_{(j-1)})] = \sum_{s=1}^{n+1} \beta^{(s)}_{(j-1)} r^{(s)}_{(j-1)} = m_{(j-1)}.$$

Это доказывает свойство $1^{(j-1)}$. Докажем, что выполняется $2^{(j-1)}$. Возьмем любую точку $m_{(j-1)} \in G_{(j-1)}(t_*)$. Вновь осуществляя переход от интегрирования по области $[\xi_{j-1}, \xi_j \dots \xi_k]$ к повторному интегрированию сначала по области $[\xi_j \dots \xi_k]$, а потом по $[\xi_{j-1}]$, учитывая построение (4.17), определение (4.11), а также свойство $2^{(j)}$ и (4.3), (4.4), (4.13), получаем

$$g_{j-1}(t_*;\mathbf{q}^0_{[j-1]}(m_{(j-1)};\cdot)) =$$
$$\sum_{s=1}^{n+1} \beta^{(s)}_{(j-1)}[\Delta\psi_{j-1}(t_*, X^T[t^{[h(\tau_j)]},\vartheta]l^0(r^{(s)}_{(j-1)}) + m^0_{(j)}(r^{(s)}_{(j-1)})) +$$
$$+ g_j(t_*;\mathbf{q}^0_{[j]}(m^0_{(j)}(r^{(s)}_{(j-1)});\cdot))] =$$
$$= \sum\nolimits_{s=1}^{n+1} \beta^{(s)}_{(j-1)}[\Delta\psi_{j-1}(t_*, r^{(s)}_{(j-1)}) + \varphi'_j(t_*, r^{(s)}_{(j-1)})] = \varphi_{j-1}(t_*, m_{(j-1)}).$$

Таким образом, свойство $2^{(j-1)}$ доказано.

Осталось проверить выполнение свойства $3^{(j-1)}$. Возьмем любую точку $m_{(j-1)} \in G_{(j-1)}(t_*)$ и любую измеримую по Борелю функцию $\mathbf{q}_{[j-1]}(\cdot)$, удовлетворяющую (4.10) и (4.20). Введем однопараметрическое семейство функций

$$\tilde{\mathbf{q}}_{\xi_{j-1}}(\xi_j,\ldots,\xi_k) = \mathbf{q}_{[j-1]}(\xi_{j-1},\xi_j,\ldots,\xi_k),$$

отвечающее параметру $\xi_{j-1} \in [0,1]$. Обозначим

$$\tilde{r}_{(j-1)}(\xi_{j-1}) = \int\limits_{[\xi_j\ldots\xi_k]} \sum_{i=h(\tau_j)}^{N} X^T[t^{[i]},\vartheta]\tilde{q}^{[i]}_{\xi_{j-1}}(\xi_j,\ldots,\xi_k)d\xi_j\ldots d\xi_k,$$

$$\tilde{m}_{(j)}(\xi_{j-1}) = \int\limits_{[\xi_j\ldots\xi_k]} \sum_{i=h(\tau_j)+1}^{N} X^T[t^{[i]},\vartheta]\tilde{q}^{[i]}_{\xi_{j-1}}(\xi_j,\ldots,\xi_k)d\xi_j\ldots d\xi_k.$$

При этом $\tilde{r}_{(j-1)}(\xi_{j-1}) \in G_{j-1}(t_*)$, $\tilde{m}_{(j)}(\xi_{j-1}) \in G_j(t_*)$ при почти всех $\xi_{j-1} \in [0,1]$. Принимая во внимание свойство $3^{(j)}$ и определение (4.5)–(4.6) функции $\varphi_j'(t_*, r_{(j-1)})$, $r_{(j-1)} \in G_{(j-1)}(t_*)$, получаем следующую цепочку неравенств:

$$g_j(t_*;\{\tilde{q}^{[h(\tau_j)+1]}_{\xi_{j-1}}(\cdot),\ldots,\tilde{q}^{[N]}_{\xi_{j-1}}(\cdot)\}) \le \varphi_j(t_*,\tilde{m}_{(j)}(\xi_{j-1})) \le \varphi_j'(t_*,\tilde{r}_{(j-1)}(\xi_{j-1})), \tag{4.24}$$

имеющую место при почти всех $\xi_{j-1} \in [0,1]$. Переходя от интегрирования по области $[\xi_{j-1},\xi_j\ldots\xi_k]$ к повторному интегрированию сначала по области $[\xi_j\ldots\xi_k]$, а потом по $[\xi_{j-1}]$, учитывая определение (4.11), неравенство (4.24), а также свойство $3^{(j)}$, получаем

$$g_{j-1}(t_*;\mathbf{q}_{[j-1]}(\cdot)) =$$
$$= \int_{[\xi_{j-1}]}[\Delta\psi_{j-1}(t_*,\tilde{r}_{(j-1)}(\xi_{j-1})) + g_j(t_*;\{\tilde{q}^{[h(\tau_j)+1]}_{\xi_{j-1}}(\cdot),\ldots,\tilde{q}^{[N]}_{\xi_{j-1}}(\cdot)\})]d\xi_{j-1} \le$$
$$\le \int\limits_{[\xi_{j-1}]}[\Delta\psi_{j-1}(t_*,\tilde{r}_{(j-1)}(\xi_{j-1})) + \varphi_{j-1}'(t_*,\tilde{r}_{(j-1)}(\xi_{j-1}))]d\xi_{j-1} \le \varphi_{j-1}(t_*,m_{(j-1)}),$$

что доказывает $3^{(j-1)}$. Обоснование последнего неравенства проводится здесь аналогично доказательству свойства, проведенному при рассмотрении базы индукции при $j = k$.

Подобным же образом можно провести доказательство свойств $1^{(j-1)}$–$3^{(j-1)}$ и в случае $h(\tau_{j-1}) = h(\tau_j)$, используя вместо (4.17) построение (4.16).

В силу индукции свойства $1^{(j)}$–$3^{(j)}$ справедливы при $j = 1,\ldots,k$. Далее из свойств $1^{(1)}$, $2^{(1)}$ и соотношения (4.12) вытекает равенство

$$M\{\sum_{j=1}^{k}\Delta\psi_j(t_*,m^{(\tau_j)}(\mathbf{q}^0_{[1]}(m_{(1)};\cdot);\xi_1,\ldots,\xi_j))\} = \varphi_1(t_*,m_{(1)}). \tag{4.25}$$

Принимая во внимание $1^{(1)}$, $3^{(1)}$, получаем, что верхняя грань в (4.7) достигается на конечнозначной случайной величине $\mathbf{l}^0_{m_{(1)}}(\cdot) = \mathbf{q}^0_{[1]}(m_{(1)};\cdot)$, $m_{(1)} \in G_{(1)}(t_*)$, что, в силу (4.25), доказывает равенство (4.9). Из (4.7), (4.8) и (4.9) вытекает

$$e(t_*, x_*, \Delta_k\{\tau_j\}) = \alpha(t_*, x_*) + \sup_{m_{(1)} \in G_1(t_*)} [\langle m_{(1)}, X[\vartheta, t_*]x_*\rangle + \varphi_1(t_*, m_{(1)})]. \quad (4.26)$$

Таким образом, вычисление программного экстремума $e(\cdot)$ сводится к решению задачи о нахождении стохастических вектор-функций, доставляющих максимальное значение некоторому вспомогательному функционалу. При этом максимум достигается на конечнозначной случайной векторной величине, построение которой базируется на каратеодориевских точках и весах, отвечающих рекуррентной последовательности выпуклых сверху оболочек из вспомогательной программной конструкции (4.1)–(4.6), которая предложена в [6] для вычисления цены игры (1.1)–(1.2) на базе величины (4.26).

Литература

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
3. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
4. Осипов Ю.С. Позиционное управление в параболических системах // Приклад. математика и механика. 1977. Т.41, №2. С.195–201.
5. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
6. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under Lack of Information. Basel: Birkhäuser, 1994.
7. Красовский А.Н. Построение смешанных стратегий на основе стохастических программ // Приклад. математика и механика. 1987. Т.51, №2. С.186–192.
8. Krasovskii N.N., Reshetova T.N. On the program synthesis of a guarenteed control // Problems of Control and Information Theory. 1988. V.17, №6. P.333–343.
9. Локшин М.Д. О дифференциальных играх с интегральными ограничениями на управляющие воздействия // Дифференц. уравнения. 1992. Т.28, №11. С.1952–1961.
10. Лукоянов Н.Ю. К задаче конфликтного управления при смешанных ограничениях // Приклад. математика и механика. 1995. Т.59, №6. С.955–964.
11. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.:Наука, 1984.
12. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.:Мир, 1964.
13. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.:Мир, 1973.
14. Ширяев А.Н. Вероятность. М.:Наука, 1980.

Статья поступила 31.03.1999 г.